C
A
P
Í
T
U
L
O
I

Números Complejos

Objetivos

- Concepto de complejo y representación gráfica.
- Operaciones elementales con números complejos.
- Fórmula de Euler.
- Representaciones binómica, polar y exponencial de un complejo.
- Potencias y raíces de complejos.
- Funciones complejas simples.

Índice

Qué aprenderemos en este Capítulo?

1. Introduciremos algebraicamente el concepto de número complejo y las operaciones suma y producto de números complejos.
2. Estudiaremos la interpretación gráfica de los números complejos en el plano bidimensional (plano complejo).
3. Como una consecuencia de la representación gráfica, y usando los conceptos de mòdulo y argumento de un número complejo, veremos que los números complejos se pueden representar de diferentes maneras: forma binómica, forma polar y forma exponencial.
4. Demostraremoa la llamada fórmula de Euler, de gran importancia en la teoría de los números complejos.
5. La fórmula de Euler nos permitirà calcular las potencies y raíces de un número complejo de una manera sencilla.
6. Estudiaremos, aunque brevemente, las ecuaciones polinómicas con coeficientes y variable complejos.
7. Definiremos las funciones complejas: logaritmo y el seno y coseno trigonométricos e hiperbólicos y estudiaremos sus propiedades más relevantes.

Autoevaluación: Qué hemos de saber hacer?

1. Entender claramente el concepto de número complejo y su representación gràfica.
2. Manejar algebraicamente los números complejos: suma, resta, producto, división, complejo conjugado y el cálculo del mòdulo y el argumento.
3. Relacionar las diferentes representaciones de un número complejo: formas binòmica, polar y exponencial.
4. Calcular las potencies y raíces de números complejos utilizando la fórmula de Euler.
5. Aplicar las propiedades de las ecuaciones polinómicas complejas; especialmente el Teorema Fundamental del Àlgebra y la determinación de los ceros de un polinomio.
6. Calcular el logaritmo y el seno y coseno trigonométricos e hiperbólicos de un número complejo y aplicar sus propiedades.

Necesidad de los números complejos

• Consideremos la ecuación: $z^2+1=0$. Esta ecuación no tiene solución real porque implica la raíz cuadrada de un número negativo. Para encontrar soluciones a este tipo de ecuaciones, se introduce el llamado *número imaginario* i tal que $i^2=-1$, es decir $i \equiv \sqrt{-1}$, de manera que las soluciones de la ecuación $z^2+1=0$ son: $z=\pm i$.
• Por ejemplo, las soluciones de la ecuación cuadrática: $z^2 - 4z + 5 = 0$ son $z = 2 \pm 2i$.
• Las expresiones de la forma $z=a+ib$ se llaman **números complejos** y se construyen como pares ordenados de números reales (a,b).
• El primer término se llama parte real, $\mathrm{Re}\{z\} \equiv a$, y el segundo parte imaginaria, $\mathrm{Im}\{z\} \equiv b$, del número complejo z.
• Puesto que son parejas de números reales, los números complejos se pueden representar por puntos del plano (representación llamada diagrama de Argand). Volveremos más tarde sobre este punto.

Definición formal de los números complejos

• Definimos el cuerpo de los números complejos, $(\mathcal{C},+,\cdot)$, como el conjunto de pares ordenados de números reales $\mathcal{C} \equiv \{z = (x,y) \,/\, x, y \in \mathcal{R}\}$ con las operaciones siguientes:

Igualdad: Dos números complejos, $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$, son iguales si y sólo si

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad y_1 = y_2 \tag{I.1}$$

Suma: La suma de dos números complejos es la suma de pares homológos (componente a componente):

$$z_1 + z_2 = (x_1+x_2,\, y_1+y_2) \tag{I.2}$$

Producto: El producto de dos números complejos es otro número complejo dado por:

$$z_1\, z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2,\, x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \tag{I.3}$$

Propiedades de la suma de números complejos

• Es asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
• Existe un y sólo un elemento neutro, el $0 \equiv (0,\, 0)$ tal que $z + 0 = 0 + z = z$, $\forall\, z \in \mathcal{C}$.
• Para todo número complejo, z, existe el opuesto $(-z) \equiv (-x,\, -y)$ tal que $z + (-z) = 0$.
• La suma de números complejos es conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Propiedades del producto de números complejos

• Es asociativo: $(z_1\, z_2)\, z_3 \;=\; z_1\, (z_2\, z_3)$.
• Existe un y sólo un elemento neutro, el $1 \equiv (1,\, 0)$ tal que $z\, 1 \;=\; 1\, z \;=\; z,\ \forall\, z \in \mathcal{C}$.
• Para todo número complejo no nulo, $z \in \mathcal{C} - \{0\}$, existe el inverso $z^{-1} \;\equiv\; 1/z \;\equiv\; \left(\frac{x}{x^2+y^2},\, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ tal que $z\, z^{-1} \;=\; z^{-1}\, z \;=\; 1$.
• El producto de números complejos es conmutativo: $z_1\, z_2 \;=\; z_2\, z_1$.
• El producto es distributivo respecto de la suma: $z_1\, (z_2 \,+\, z_3) \;=\; z_1\, z_2 \,+\, z_1\, z_3$.

Forma binómica de los números complejos

• Es preciso señalar que la notación histórica, **forma binómica**, que es intuitiva y práctica y la usaremos con frecuencia, se puede obtener de la representación de pares simplemente definiendo:

$$1 \;\equiv\; (1,\, 0) \qquad\qquad i \;\equiv\; (0,\, 1) \tag{I.4}$$

de manera que cualquier número complejo se puede escribir en la forma

$$z \;\equiv\; (x,\, y) \;=\; x\, 1 \,+\, y\, i \;=\; x \,+\, i\, y \tag{I.5}$$

• En esta representación, las operaciones (**I.1**), (**I.2**) y (**I.3**) se reproducen simplemente teniendo en cuenta la propiedad $i^2 = -1$:

Igualdad: dos números complejos, $z_1 = x_1 \,+\, i\, y_1$ y $z_2 = x_2 \,+\, i\, y_2$, son iguales si y sólo si

$$z_1 \;=\; z_2 \iff x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2 \tag{I.6}$$

Suma: la suma (resta) de dos números complejos es otro número complejo cuyas partes real e imaginaria son respectivamente la suma y la resta de las partes reales e imaginaries de los sumandos:

$$z_1 \,\pm\, z_2 \;=\; (x_1 \pm x_2) \,+\, i\, (y_1 \pm y_2) \tag{I.7}$$

Producto: el producto de dos números complejos es otro número complejo que se obtiene multiplicándolos como si fueran reales y utilizando que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 \;&=\; (x_1 \,+\, i\, y_1)\, (x_2 \,+\, i\, y_2) \\ &=\; x_1\, x_2 \,+\, i\, x_1\, y_2 \,+\, i\, y_1\, x_2 \,+\, i^2\, y_1\, y_2 \\ &=\; (x_1\, x_2 \,-\, y_1\, y_2) \,+\, i\, (x_1\, y_2 \,+\, x_2\, y_1) \end{aligned} \tag{I.8}$$

Así,

$$\mathrm{Re}\{z_1\, z_2\} \;=\; x_1\, x_2 \,-\, y_1\, y_2 \qquad \mathrm{Im}\{z_1\, z_2\} \;=\; x_1\, y_2 \,+\, x_2\, y_1 \tag{I.9}$$

Complejo conjugado

• Si $z = x + i\,y$, definimos su **complejo conjugado**, z^*, como un número complejo cuya parte real es la misma que la de z mientras que la parte imaginaria es la de z cambiada de signo:

$$\text{Si } z = x + i\,y \longrightarrow z^* = x - i\,y \tag{I.10}$$

• Notar que la operación de conjugación compleja consiste básicamente en la sustitución $i \to -i$.
• Algunas propiedades interesantes son:

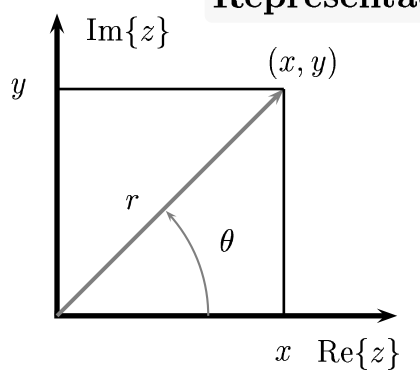
1. $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$.
2. $(z_1\, z_2)^* = z_1^*\, z_2^*$.
3. $(z^{-1})^* = (1/z)^* = (z^*)^{-1} = 1/z^*$.
4. $\mathrm{Re}\{z\} = \frac{1}{2}\,(z + z^*)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\{z\} = \frac{1}{2i}\,(z - z^*)$.
5. $z\, z^* = z^*\, z = x^2 + y^2$.

División de números complejos

• La división de dos números complejos, z_1/z_2, se define como el producto del primero por el inverso del segundo: $z_1/z_2 = z_1\, z_2^{-1}$.
• La fórmula explícita de la división se obtiene así:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2}\,\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{(x_1 + i\,y_1)\,(x_2 - i\,y_2)}{(x_2 + i\,y_2)(x_2 - i\,y_2)} \\ &= \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2\,y_1 - x_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{I.11}$$

Representación gráfica de los números complejos



• Gráficamente los números complejos los podemos representar por medio de un vector en un plano que se llama **plano complejo**. Los ejes ortogonales del plano complejo son **el eje real**, en la dirección de 1, y **el eje imaginario**, en la dirección de i. Referido a estos ejes, un número complejo $z = x + i\,y$ tiene como coordenadas (x, y) (ver la figura).
• Así pues, con esta representación vemos que hay una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano complejo y el conjunto de los números complejos.

Módulo y argumento de un número complejo

De la representación gráfica cobran significado geométrico las siguientes definiciones:
- El **módulo** de un número complejo, $|z|$, es la longitud, r, del vector que lo representa:

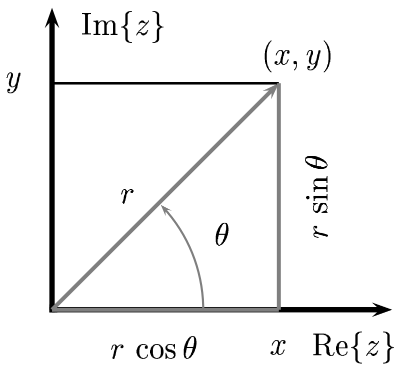
$$|z| \;=\; |x+i\,y| \;=\; r \;=\; \sqrt{x^2+y^2} \;=\; \sqrt{z\,z^*} \tag{I.12}$$

- El **argumento** de un número complejo, $\mathbf{arg}\,z$, es el ángulo, θ, que forma el vector que representa el número complejo con el eje real:

$$\mathbf{arg}\,z \;=\; \theta \;=\; \arctan\frac{y}{x} \tag{I.13}$$

- Es preciso notar que los números complejos (x,y) y $(-x,-y)$ tienen el mismo argumento, si se utiliza la fórmula anterior. Entonces, existe una ambigüedad que se puede resolver fácilmente si tenemos en cuenta el signo de x y de y para situar el punto en el cuadrante correcto.
- Además, existe otra ambigüedad debida a la periodicidad de las funciones trigonométriquas: **arg** z está definido salvo un múltiplo entero de vueltas alrededor del origen: **arg** $z = \theta + 2k\pi$.

Representación polar de los números complejos



- Los puntos (x,y) del plano se pueden representar también por su forma polar $(r,\,\theta)$.
- En coordenadas polares tenemos (observar la figura):

$$x \;=\; r\,\cos\theta \qquad y \;=\; r\,\sin\theta \tag{I.14}$$

Entonces, un número complejo $z = x+i\,y$ se puede representar por la conocida como **forma polar o trigonométrica**:

$$z \;=\; r\,(\,\cos\theta \,+\, i\,\sin\theta\,) \tag{I.15}$$

Representación exponencial de los números complejos

- En la **forma exponencial** utilizamos la llamada fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} \;=\; \cos\theta \,+\, i\,\sin\theta \tag{I.16}$$

para expresar un número complejo cualquiera como:

$$z \;=\; r\,(\cos\theta \,+\, i\,\sin\theta) \;=\; r\,e^{i\theta} \tag{I.17}$$

La Fórmula de Euler.

• Lo que deseamos demostrar es: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$
• Recordemos los desarrollos de Taylor de $\sin\theta$ y $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{I.18}$$

• Puesto que $i^2 = -1$, el factor $(-1)^n$ se puede escribir de una forma en muchos casos más conveniente:
$(-1)^n = (i^2)^n = i^{2n}$ y además $i\,(-1)^n = i\,(i^2)^n = i^{2n+1}$.
• Consideramos ahora un número complejo de módulo unidad: $u = \cos\theta + i\,\sin\theta$. Sustituyendo los desarrollos de Taylor de $\sin\theta$ y $\cos\theta$ y usando la propiedad anterior, tenemos:

$$+\,i\,\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta + i\,\sin\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{n}}{(n)!} = e^{i\theta}
\end{aligned} \tag{I.19}$$

donde hemos utilizado el desarrollo de Taylor de la exponencial

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{I.20}$$

• De hecho es más correcto tomar (**I.20**) como una **definición de la exponencial de un número complejo**. satisfacen

Relación funcional de la exponencial.

• Sea $z = x + i\,y$, entonces

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + i\,y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k\,(iy)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!} = e^x\,e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\,\sin y)
\end{aligned} \tag{I.21}$$

• Utilizando la propiedad (**I.21**), podemos demostrar la **relación funcional de la exponencial**:

$$\begin{aligned}
e^{z_1}\,e^{z_2} &= e^{x_1}\,(\cos y_1 + i\,\sin y_1)\,e^{x_2}\,(\cos y_2 + i\,\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}\,(\cos(y_1+y_2) + i\,\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}
\end{aligned} \tag{I.22}$$

Propiedades de la representación exponencial de los números complejos

• Usando la forma exponencial, el producto de dos números complejos es simplemente:

$$z_1\, z_2 \;=\; r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \;=\; r_1\, r_2\, (\cos(\theta_1+\theta_2) \,+\, i\, \sin(\theta_1+\theta_2)) \tag{I.23}$$

• Por otra parte, la división de dos números complejos se puede escribir como:

$$\frac{z_1}{z_2} \;=\; \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} \;=\; \frac{r_1}{r_2}\, (\cos(\theta_1-\theta_2) \,+\, i\, \sin(\theta_1-\theta_2)) \tag{I.24}$$

• Además, de las ecuaciones anteriores deducimos que:

$$\begin{aligned} |z_1\, z_2| &= |z_1|\,|z_2|, \qquad & \mathbf{arg}\, z_1\, z_2 &= \mathbf{arg}\, z_1 \,+\, \mathbf{arg}\, z_2 \,+\, 2k\pi \\ |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2|, \qquad & \mathbf{arg}\, z_1/z_2 &= \mathbf{arg}\, z_1 \,-\, \mathbf{arg}\, z_2 \,+\, 2k\pi \end{aligned} \tag{I.25}$$

Potencias de los números complejos

• Utilizando la forma exponencial es fácil encontrar la potencia de un número complejo:

$$\begin{aligned} z^n &= \left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta} \\ &= r^n\, (\cos n\theta \,+\, i\, \sin n\theta) \end{aligned} \tag{I.26}$$

• Esta es la llamada **fórmula de de Moivre** que nos permite encontrar de forma sencilla las relaciones trigonométricas para al seno y coseno de múltiplos enteros de un ángulo:

$$(\cos\theta \,+\, i\, \sin\theta)^n \;=\; \left(e^{i\theta}\right)^n \;=\; \left(e^{in\theta}\right) \;=\; (\cos n\theta \,+\, i\, \sin n\theta) \tag{I.27}$$

Raíces de los números complejos

• El número complejo w es la **raíz n-ésima** de z si $w^n = z$. Empleando la forma exponencial, tenemos que las raíces serán las soluciones de la ecuación:

$$w \;=\; \sqrt[n]{z} \;=\; z^{1/n} \;=\; \left(r\, e^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{1/n} \;=\; r^{1/n}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \tag{I.28}$$

• Puesto que para $k = n$ obtenemos el mismo resultado que para $k = 0$, deducimos que un número complejo tiene n raíces n-ésimas diferentes correspondientes a $k = 0, 1, 2 \cdots n-1$ y además se satisfará que:

$$\mathbf{arg}\, z^{1/n} \;=\; \frac{1}{n}\, (\mathbf{arg}\, z \,+\, 2k\pi) \tag{I.29}$$

Teorema fundamental del álgebra

• Sea una ecuación polinómica con coeficientes complejos:

$$a_0\, z^n \,+\, a_1\, z^{n-1} \,+\, a_2\, z^{n-2} \,+\, \cdots \,+\, a_{n-1}\, z \,+\, a_n \,=\, 0 \qquad \textbf{(I.30)}$$

donde $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$ son números complejos y n es un entero positivo que se llama el *grado* de la ecuación. Sus soluciones se llaman los *zeros* del polinomio o también las *raíces* de la ecuación.
• Daremos, sin demostrar, un teorema muy importante sobre las ecuaciones polinómicas, conocido como **el teorema fundamental del álgebra**:
Toda ecuación polinómica de grado n tiene n raíces complejas, algunas de las cuales, o todas, pueden ser iguales.
• Si $z_1, \ldots, z_n$ son las n raíces de la ecuación (**I.30**), ésta puede escribirse en la forma:

$$a_0\,(z\,-\,z_1)\,(z\,-\,z_2)\,\cdots\,(z\,-\,z_n)\,=\,0 \qquad \textbf{(I.31)}$$

Algunas propiedades de las ecuaciones polinómicas

• Si un número racional irreducible p/q es solución de la ecuación polinómica $a_0\, z^n \,+\, a_1\, z^{n-1} \,+\, \cdots \,+\, a_{n-1}\, z \,+\, a_n \,=\, 0$ con coeficients enteros $a_0, \ldots\ a_n$, entonces p ha ser divisor de a_n y q de a_0.
• La suma y el producto de todas las raíces de $a_0\, z^n \,+\, a_1\, z^{n-1} \,+\, \cdots \,+\, a_{n-1}\, z \,+\, a_n \,=\, 0$ con coeficientes complejos son $-a_1/a_0$ y $(-1)^n\, a_n/a_0$.
• Si $x \,+\, i\, y$ es una raíz de $a_0\, z^n \,+\, a_1\, z^{n-1} \,+\, \cdots \,+\, a_{n-1}\, z \,+\, a_n \,=\, 0$ donde $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$ son números reales, entonces $x \,-\, i\, y$ es también una raíz.
• Es preciso notar que si $a_0 \neq 0$, $a_1, \ldots, a_n$ no son todos números reales, la propiedad anterior no es cierta.

Logaritmo de un número complejo

• El logaritmo es la función inversa de la exponencial. Entonces, $w = \ln z$ si y solamente si $e^w = z$. Utilizamos la forma exponencial para z:

$$z \,=\, |z|\, e^{i\,(\mathbf{arg}(z)\,+\,2k\pi)} \,=\, e^{\ln|z|\,+\,i\,(\mathbf{arg}(z)\,+\,2k\pi)} \qquad \textbf{(I.32)}$$

así, igualando $e^w = z$ tenemos que:

$$w \,\equiv\, \ln z \,=\, \ln|z| \,+\, i\,(\mathbf{arg}(z) \,+\, 2k\pi) \qquad \textbf{(I.33)}$$

El logaritmo es una función multivaluada porque su parte imaginaria está indeterminada.
• Es posible restringir la función logaritmo de manera que sea univaluada definiendo el valor principal del logaritmo como una prescripción para tomar el argumento, de forma que nos restringimos a $-\pi \leq \mathbf{arg}(z) < \pi$.
• Sin embargo el valor principal no da todas las soluciones de la ecuación $e^w = z$.

Funciones trigonométricas de un número complejo

• Utilizando la fórmula de Euler es fácil deducir las siguientes relaciones:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i} \tag{I.34}$$

• Definimos, pues, las funciones trigonométricas de un número complejo, z, como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i} \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{I.35}$$

Funciones hiperbólicas de un número complejo

• Definimos las funciones hiperbólicas de un número complejo, z, de la siguiente forma:

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \tag{I.36}$$

• Entre las funcions trigonométricas y las funciones hiperbólicas se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \cos iz &= \cosh z, & \sin iz &= i\,\sinh z, & \tan iz &= i\,\tanh z \\ \cosh iz &= \cos z, & \sinh iz &= i\,\sin z, & \tanh iz &= i\,\tan z \end{aligned} \tag{I.37}$$

Relaciones funcionales

• Empleando la relación (**I.33**), podemos demostrar **la relación funcional del logaritmo** :

$$\begin{aligned} \ln(z_1\,z_2) &= \ln|z_1\,z_2| + i\,(\,\mathbf{arg}(z_1) + \mathbf{arg}(z_2) + 2k'\pi\,) \\ &= \ln|z_1| + i\,(\,\mathbf{arg}(z_1) + 2k_1\pi\,) + \ln|z_2| + (\,\mathbf{arg}(z_2) + 2k_2\pi\,) \\ &\quad + i\,(\,2\,k' - 2\,k_1 - 2\,k_2\,)\,\pi \\ &= \ln z_1 + \ln z_2 + 2\,k\,\pi\,i \end{aligned} \tag{I.38}$$

• Otras relaciones funcionales son:

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1\,\cos z_2 + \sin z_2\,\cos z_1 \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1\,\cos z_2 - \sin z_1\,\sin z_2 \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1 \\ \sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1\,\cosh z_2 + \sinh z_2\,\cosh z_1 \\ \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1\,\cosh z_2 + \sinh z_1\,\sinh z_2 \end{aligned} \tag{I.39}$$

Fórmula del producto de dos series

• En la sección *Relación funcional de la exponencial*, en la ecuación (**I.21**) en la página 5, escribimos el producto de dos series, empleando un resultado que ahora demostraremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k\,(iy)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\;\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iy)^m}{m!} \tag{AI.1}$$

• En general. Sean dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, el producto de las cuales es:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= (a_0+a_1+a_2+\cdots)\,(b_0+b_1+b_2+\cdots)\\
&= \begin{array}{ccccccccccc}
a_0\,b_0 & + & a_0\,b_1 & + & a_0\,b_2 & + & a_0\,b_3 & + & a_0\,b_4 & + & \cdots\\
a_1\,b_0 & + & a_1\,b_1 & + & a_1\,b_2 & + & a_1\,b_3 & + & a_1\,b_4 & + & \cdots\\
a_2\,b_0 & + & a_2\,b_1 & + & a_2\,b_2 & + & a_2\,b_3 & + & a_2\,b_4 & + & \cdots\\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \cdots\\
a_i\,b_0 & + & a_i\,b_1 & + & a_i\,b_2 & + & a_i\,b_3 & + & a_i\,b_4 & + & \cdots\\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \cdots
\end{array}\end{aligned}$$

Si las series son convergentes, podemos reordenar los términos $a_i\,b_j$ como queramos. Es interesante agruparlos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) &= a_0\,b_0\\
&+ (a_0\,b_1+a_1\,b_0)\\
&+ (a_0\,b_2+a_1\,b_1+a_2\,b_0)\\
&+ (a_0\,b_3+a_1\,b_2+a_2\,b_1+a_3\,b_0)\\
&+ (a_0\,b_4+a_1\,b_3+a_2\,b_2+a_3\,b_1+a_4\,b_0)\\
&+ \cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\,b_{n-k}
\end{aligned} \tag{AI.2}$$

• Entonces, la fórmula (**AI.1**) se demuestra fácilmente porque no es más que un caso particular de la fórmula general (**AI.2**) identificando $a_k=\frac{x^k}{k!}$ y $b_{n-k}=\frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!}$.

Demostración de la propiedad 1 de las ecuaciones polinómicas

• *Si un número racional irreducible p/q es solución de la ecuación polinómica $a_0\,z^n + a_1\,z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,z + a_n = 0$ con coeficientes enteros $a_0, \ldots, a_n$, entonces p es divisor de a_n y q de a_0.*

Puesto que, por hipótesis, $z = p/q$ es solución de la ecuación, se satisfará:

$$a_0\,\frac{p^n}{q^n} + a_1\,\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\,\frac{p}{q} + a_n = 0 \qquad \textbf{(AI.3)}$$

Multiplicamos esta ecuación por $\frac{q^n}{p}$:

$$a_0\,p^{n-1} + a_1\,p^{n-2}\,q + \cdots + a_{n-1}\,q^{n-1} = -a_n\,\frac{q^n}{p}$$

donde hemos aislado el término independente por conveniencia. El miembro de la izquierda es un número entero porque es una combinación de sumas y potencias enteras de números enteros. Entonces, el miembro de la derecha ha de serlo también. Para que lo sea, p ha de ser divisor de q y/o de a_n. Por hipótesis, sin embargo, la fracción p/q es irreducible, es decir, p y q **no tienen divisores comunes salvo** ± 1. Entonces, sólo nos queda una posibilidad: p ha de ser divisor de a_n.
Por otra parte, si multiplicamos la ecuación (**AI.3**) por q^{n-1} y aislamos ahora el primer término, encontramos:

$$a_1\,p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,p\,q^{n-2} + a_n\,q^{n-1} = -a_0\,\frac{p^n}{q}$$

El miembro de la izquierda es un número entero porque es una combinación de sumas y potencias enteras de números enteros. Entonces, el miembro de la derecha ha de serlo también. Para que lo sea, q ha de ser divisor de p y/o de a_0. Por hipótesis, sin embargo, la fracción p/q es irreducible, es decir, p y q **no tienen divisores comunes salvo** ± 1. Entonces, sólo nos queda una posibilidad: q ha de ser divisor de a_0.
Por tanto, si p/q es una raíz del polinomio, p es un divisor de a_n y q de a_0, como queríamos demostrar.

• **Ejemplo:**
Sea la ecuación $z^3 - 2\,z^2 + z - 2 = 0$, los coeficientes de ella son número enteros.
Buscamos las soluciones racionales $\omega = p/q$, si hay alguna. Puesto que $a_0 = 1$, q ha de ser ± 1. Además, puesto que $a_n = -2$, p puede ser $\pm 1, \pm 2$. Entonces las raíces racionales sólo pueden ser: $\omega = \pm 1, \pm 2$. Probando es fácil ver que 2 es la única solución racional. Las otros dos soluciones son complejas: i y $-i$, y así:

$$z^3 - 2\,z^2 + z - 2 = (z-2)\,(z-i)\,(z+i)$$

Demostración de la propiedad 2 de las ecuaciones polinómicas

• *La suma y el producto de todas las raíces de* $a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$, *y con coeficientes complejos son* $-a_1/a_0$ *y* $(-1)^n\, a_n/a_0$, *respectivamente.*

■ Sean z_1, z_2, …, z_n, las n raíces del polinomio que en forma factorizada se escribe:

$$a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = a_0\,(z - z_1)\,(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0$$

Si multiplicamos los monomios $(z - z_i)$, tenemos:

$$\begin{aligned} & a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = \\ & \qquad a_0 \left\{ z^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\, z^{n-1} + \cdots + (-1)^n\, z_1\, z_2 \cdots z_n \right\} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(AI.4)}$$

Las dos formas de escribir el polinomio son equivalentes, con lo que los coeficientes de las mismas potencias de z son iguales. Por tanto, igualando los coeficientes de z^{n-1} y $z^0 = 1$, obtenemos las ecuaciones:

$$a_1 = -a_0 \sum_{i=1}^{n} z_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_1}{a_0} \qquad a_n = (-1)^n a_0 \prod_{i=1}^{n} z_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} z_i = (-1)^n\, \frac{a_n}{a_0} \qquad \textbf{(AI.5)}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Demostración de la propiedad 3 de las ecuaciones polinómicas

• *Si* $x + i\, y$ *es una raíz de* $a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = 0$ *donde* $a_0 \neq 0$, *y los coeficientes* $a_1, \ldots, a_n$ *son números reales, entonces* $x - i\, y$ *es también una raíz.*

■ Puesto que, por hipótesis, $\omega = x + iy$ es solución de la ecuación, se satisfará:

$$a_0\, w^n + a_1\, w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, w + a_n = 0 \qquad \textbf{(AI.6)}$$

Tomando el conjugado de toda la ecuación:

$$\begin{aligned} (0)^* = 0 &= \left(a_0\, w^n + a_1\, w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, w + a_n \right)^* \\ &= (a_0\, w^n)^* + \left(a_1\, w^{n-1} \right)^* + \cdots + (a_{n-1}\, w)^* + (a_n)^* \\ &= (a_0)^*\, (w^n)^* + (a_1)^* \left(w^{n-1} \right)^* + \cdots + (a_{n-1})^*\, (w)^* + (a_n)^* \\ &= (a_0)^*\, (w^*)^n + (a_1)^*\, (w^*)^{n-1} + \cdots + (a_{n-1})^*\, (w)^* + (a_n)^* \\ &= a_0\, (w^*)^n + a_1\, (w^*)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, w^* + a_n \end{aligned} \qquad \textbf{(AI.7)}$$

donde hemos usado las propiedades de la operación de conjugación compleja y, en el último paso, hemos utilizado que, por hipótesis, los coeficientes a_i son números reales y por tanto $(a_i)^* = a_i$. Entonces, $w^* = x - i\, y$ es también una raíz de la ecuación polinómica, que es lo que queríamos demostrar. ■