PAU 2018 Opción A

Comunidad Valenciana

Ejercicio 1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y-z=1-a \\ -x+z=5 \\ -ax+y-z=1 \end{cases}$ **, donde a es un parámetro real.**

Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$.

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

Solución Del sistema $\begin{cases} y-z=1-a \\ -x+z=5 \\ -ax+y-z=1 \end{cases}$ obtenemos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Para que el sistema sea compatible determinado, $rg(A) = rg(A') = 3$.

Calculemos el rango de A. Como A es 3×3, el máximo rango de A será 3.

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$$

$$|A| = 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-a) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + a \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 1 = -a$$

Por lo tanto, cuando $a = 0$, $rg(A) = 2$ y cuando $a \neq 0$, $rg(A) = 3$.

Calculemos el rango de A'. Como A' es 3×4, el máximo rango de A' será 3.

$$|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A') \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(A') \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-a \\ -1 & 0 & 5 \\ -a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4a$$

Por lo tanto, cuando $a = 0$, $rg(A) = 2$ y cuando $a \neq 0$, $rg(A) = 3$.

Finalmente, para que el sistema sea compatible determinado se debe cumplir que $\boxed{a \neq 0}$.

b) Para $a = 3$, el sistema es compatible determinado. Aplicamos la regla de Cramer para resolver el sistema sabiendo que $|A| = -3$. Luego, tenemos que:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3}{-3} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$z = \frac{\Delta_y}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-12}{-3} \Rightarrow \boxed{z = 4}$$

c) El sistema es compatible indeterminado cuando $rg(A) = rg(A') < 3$, esto es, para $a = 0$. La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que el sistema se reduce a estas dos ecuaciones: $-x + z = 5$, $y - z = 1$. Tomamos $z = \alpha \in \mathbb{R}$. Luego, $y = 1 + z = \alpha + 1$. Finalmente, $x = z - 5 = \alpha - 5$.

Las soluciones del sistema son $\boxed{x = \alpha - 5}$, $\boxed{y = \alpha + 1}$, $\boxed{z = \alpha}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Dados los puntos $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.

Solución a) Para que AC sea la hipotenusa del triángulo, se debe cumplir que $\vec{AB}$ sea ortogonal (perpendicular) al vector $\vec{BC}$, lo que implica que se producto escalar tiene que ser 0:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow (2 - (-1), 3 - 2, 5 - \lambda) \cdot (3 - 2, 5 - 3, 3 - 5) = 0 \Rightarrow (3, 1, 5 - \lambda) \cdot (1, 2, -2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (5 - \lambda)(-2) = 0 \Rightarrow 3 + 2 - 10 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}}$$

b) Recordamos que el área de un triángulo de vértices A, B y C es de:

$$A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{BC}|$$

Por tanto, tenemos que calcular el producto vectorial aplicando la regla de Sarrus:

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2i + 6k - j - k + 2i + 6j = 0i + 5j + 5k = (0, 5, 5)$$

Finalmente, el área pedida es de:

$$A = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2}|(0, 5, 5)| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ \text{u}^2}$$

c) Recordamos que para determinar la ecuación de un plano necesitamos dos vectores directores y un punto. Como que los puntos A, B y C estan en el plano. Un punto del plano, por lo tanto, es $A = (-1, 2, 6)$. Y los dos vectores directores del plano son: $\vec{AB} = (3, 1, -1)$ y $\vec{BC} = (1, 2, -2)$. Entonces para calcular la ecuación del plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y - 2 & z - 6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x+1) - 1(y-2) + 6(z-6) - (z-6) + 2(x+1) + 6(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2 - y + 2 + 6z - 36 - z + 6 + 2x + 2 + 6y - 12 = 0 \Rightarrow 5y + 5z - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv y + z - 8 = 0}$$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$**.**

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$**.**

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$**, el eje de abcisas y las rectas** $x = 2$ **y** $x = 3$**.**

Solución a) Dominio,

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$

Luego, $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{0,1\} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)}$.

Asíntotas verticales posibles en $x = 0$ y en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - x} = \infty \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

Como que tiene asíntota horizontal, no tendrá asíntota oblicua.

b) Para obtener los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - x) - 1 \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-2x + 1}{(x^2 - x)^2}$$

Calculamos las raíces del numerador:

$$-2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos: $(-\infty, 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $(1, +\infty)$.

En $f'(x)$ el denominador está elevado al cuadrado, será positivo siempre; luego el signo de $f'(x)$ depende del numerador que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz $\dfrac{1}{2}$. Por tanto, el signo de $f'(x)$ será positivo para $x < \dfrac{1}{2}$ y negativo para $x > \dfrac{1}{2}$.

Por tanto, $f(x)$ **es creciente en** $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ **y decreciente en** $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$**.**

c) La función no corta nunca al eje de abscisas porque $1 \neq 0$ en el cuerpo de los números reales. Luego, el área pedida es:

$$A = \int_2^3 f(x)dx$$

Primero, tenemos que calcular $\int \dfrac{1}{x^2 - x} dx$. Es una integral racional, descomponemos el integrando:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}$$

Por tanto, comparando los polinomios de los numeradores inicial y final, debe ser:

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x - 1} = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x - 1} = -\ln|x| + \ln|x - 1| + C$$

Luego, aplicando la regla de Barrow, tenemos que:

$$A = \int_2^3 f(x)dx = [-\ln|x| + \ln|x-1|]_2^3 = (-\ln(3) + \ln(3-1)) - (-\ln(2) + \ln(2-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\ln(3)+\ln(2)+\ln(2) = 2\ln(2)-\ln(3) = \ln(2^2)-\ln(3) = \ln(4)-\ln(3) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.287\,\text{u}^2}$$

PAU 2018 Opción B

Comunidad Valenciana

Ejercicio 1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$.

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$.

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2.

Solución a) De la condición $A^2 + 2A = 3I$, tenemos que:

$$A(A+2I) = 3I \Rightarrow A\frac{A+2I}{3} = I \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I$$

Por la definición de matriz inversa, tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{2}{3}}$$

b) De la condición $A^2 + 2A = 3I$, tenemos que:

$$A^2 = -2A+3I \Rightarrow (A^2)^2 = (-2A+3I)^2 \Rightarrow A^4 = (2A)^2 - 2\cdot 2A\cdot 3I + (3I)^2 \Rightarrow A^4 = 4A^2 - 12AI + 9I^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4 = 4(-2A+3I) - 12A + 9I = -8A + 12I - 12A + 9I = -20A + 21I$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\alpha = -20; \quad \beta = 21}$$

c) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\det(2B^{-1}) = 2^3 \det(B^{-1}) = 8\frac{1}{\det(B)} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

Ejercicio 2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r.

b) La distancia del punto A a la recta r.

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r.

Solución a) Un punto de la recta s claramente es $A(5,7,3)$ por una condición del enunciado. Un punto general de la recta r es:

$$P(3-\lambda, -1+3\lambda, 2\lambda)$$

Tenemos que encontrar este punto P para el que la recta s corta a r imponiendo que el vector $\vec{AP}$ es perpendicular al vector director de la recta r, $\vec{v_r} = (-1,3,2)$:

$$(3-\lambda-5, -1+3\lambda-7, 2\lambda-3)\cdot(-1,3,2) = 0 \Rightarrow (-\lambda-2, 3\lambda-8, 2\lambda-3)\cdot(-1,3,2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\lambda-2)(-1) + (3\lambda-8)3 + (2\lambda-3)2 = 0 \Rightarrow \lambda + 2 + 9\lambda - 24 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 14\lambda = 28 \Rightarrow \lambda = 2$$

Por tanto, el punto P es $P(1,5,4)$. Luego un vector director de la recta s es:

$$\vec{d_s} = \vec{PA} = (4,2,-1)$$

Y la ecuación de la recta s:

$$\boxed{s: \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}}$$

b) Aplicamos que:

$$d(A,r) = \frac{|\vec{d_r} \times \vec{P_rA}|}{|\vec{d_r}|}$$

Tenemos que $\vec{d_r} = (-1,3,2)$ y $\vec{P_rA} = A - P_r = (5,7,3)-(3,-1,0) = (5-3,7+1,3-0) = (2,8,3)$. Y el producto vectorial vale:

$$\vec{d_r} \times \vec{P_rA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 9i+4j-8k-6k-16i+3j = -7i+7j-14k = (-7,7,-14)$$

Luego:

$$d(A,r) = \frac{\sqrt{(-7)^2+(+7)^2+(-14)^2}}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{294}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{294}{14}} = \boxed{\sqrt{21}\,\mathrm{u}}$$

c) El plano perpendicular a r tienen como vector normal el vector director de la recta. Por tanto, los coeficientes de x, y, z en su ecuación general son las componentes del vector director de r.

$$\pi: -x+3y+2z+d=0$$

Para obtener el término independiente, sustituimos las coordenadas del punto $(3,-1,0)$ en la ecuación y despejamos d:

$$-3+3(-1)+2\cdot 0+d=0 \Rightarrow -6+d=0 \Rightarrow d=6$$

Por tanto: $\pi \equiv -x+3y+2z+6=0$ Para calcular la distancia del punto B al plano π se utiliza la expresión:

$$d(B,\pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-1(1)+3\cdot 1+2\cdot 1+6|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{7}\,\mathrm{u}}$$

Ejercicio 3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100-x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$.

b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor.

c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido.

Solución a) Claramente para calcular la función que expresa la suma de las dos áreas, tenemos que calcular antes estas áreas. Pues vamos a por ello. Empezamos por el área del triángulo equilátero (con todos los lados iguales). El perímetro del triángulo debe ser x, por tanto, cada lado mide $x = 3y \Rightarrow y = \dfrac{x}{3}$ Aplicando el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo, tenemos que:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{12} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}x}{6}$$

Por tanto, el área del triángulo equilátero vale:

$$A_{\triangle} = \frac{\frac{x}{3}\cdot h}{2} = \frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}x}{6}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}x^2}{18}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

Y el área del cuadrado de perímetro $100-x$ (por tanto de lado, $4l = 100 - x \Rightarrow l = \dfrac{100-x}{4}$) es de:

$$A_{\square} = l^2 = \frac{(100-x)^2}{4^2} = \frac{100^2 - 2\cdot 100x + x^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{25}{2}x + 625$$

Por tanto, la función pedida es:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{25}{2}x + 625 \Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{144}x^2 - \frac{25}{2}x + 625, \quad 0 \leq x \leq 100}$$

b) Para calcular los mínimos absolutos, necesitamos calcular los relativos y por tanto estudiar el signo de la segunda derivada en los puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - \frac{25}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} : \frac{9+4\sqrt{3}}{72} = \frac{25\cdot 72}{2\cdot(9+4\sqrt{3})} = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}$$

Luego,

$$f''(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{72} > 0$$

Por tanto, el valor obtenido es un mínimo relativo. Para asegurar que sea absoluto, tenemos que calcular las respectivas imágenes de los puntos candidatos:

$$f\left(\frac{900}{4\sqrt{3}+9}\right) \approx 271.85$$

$$f(0) = 625$$

$$f(100) = 481.13$$

Vemos que efectivamente el mínimo absoluto se encuentra en:

$$\boxed{x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}\ \text{cm}}$$

c) En el otro apartado, hemos visto que el máximo absoluto se encuentra en $\boxed{x=0}$. Esto significa que todo el alambre se utiliza para construir el cuadrado.