MATEMÁTICAS APLICADAS (MADRID 2017)

OPCIÓN A:

1) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Discutir para qué valores de k tiene A inversa.

b) Determinar para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $AX = B$.

$$\exists A^{-1} \leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_1+F_2 \\ F_3+F_2}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-k \\ 1 & -2 & 1 \\ k+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+1)(1-k) = 0 \to k = \pm 1$$

$$\to A \text{ tiene inversa } \forall k \neq \pm 1$$

Para $k = 0, \exists A^{-1}$; entonces: $AX = B \to A^{-1}(AX) = A^{-1}B \to (A^{-1}A)X = A^{-1}B \to$

$IX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$. Por el Método de Gauss:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \underbrace{\sim}_{\substack{F_1-F_3 \\ F_2+F_3}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \underbrace{\sim}_{\substack{F_1\leftrightarrow F_2 \\ F_2\leftrightarrow F_3}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right)$$

$$\underbrace{\sim}_{F_3-F_1} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix}\right) \underbrace{\sim}_{F_2+F_3} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{matrix}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

2) Considérese la región del plano definida por:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + 6y \geq 6, 5x - 2y \geq -2, x + 3y \leq 20, 2x - y \leq 12\}$$

a) Representarla gráficamente y obtener sus vértices.

b) Determínese los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando su valor en esos puntos.

a) $\begin{cases} r_1 \equiv x + 6y = 6 \\ r_2 \equiv 5x - 2y = -2 \\ r_3 \equiv x + 3y = 20 \\ r_4 \equiv 2x - y = 12 \end{cases} \to \begin{cases} x + 6y = 6 \\ 5x - 2y = -2 \end{cases} \to A(0,1), \begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \to B(2,6)$

$$\begin{cases} x + 3y = 20 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \to C(8,4) \ y \ \begin{cases} x + 6y = 6 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \to D(6,0)$$

$$z=f(x,y)=4x-3y\begin{cases} z_A=f(0,1)=-3 \\ z_B=f(2,6)=-10 \\ z_c=f(8,4)=20 \\ z_D=f(6,0)=24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_{Mín}=f(2,6)=-10 \\ z_{Máx}=f(6,0)=24 \end{cases}$$

4)a) Determinar el valor de la derivada de la función

$$f(x)=\frac{e^x}{1+x}$$

En el punto de abscisa $x=0$.

b) Estudiar las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$a)\quad f(x)=\frac{e^x}{1+x}\rightarrow f'(x)=\frac{e^x(1+x)-e^x\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{xe^x}{(1+x)^2}\rightarrow f'(0)=0$$

$$b)\ 1-x^2=0\rightarrow x=\pm 1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty \end{cases} y \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty \end{cases}\rightarrow Asíntotas\ verticales\colon \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\rightarrow No\ hay\ asíntota\ horizontal.$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^3}=-1\ \ y\ b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-x)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0\rightarrow Asíntota\ oblicua\colon\ y=-x$$

3) Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25% de sus furgonetas tiene menos de 2 años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre 2 y 4 años, y el resto tiene una antigüedad superior a 4 años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si su antigüedad es inferior a 2 años; 0,05 si tiene una antigüedad entre 2 y 4 años y 0,12 si es superior a 4 años. Se elige una furgoneta al azar. Hallar la probabilidad de que:

a) Se estropee.

b) Tenga más de 4 años, sabiendo que no se ha estropeado.

a) Llamemos $A, B\ y\ C$ respectivamente a los sucesos "menos de 2 años", "entre 2 y 4 años" y "más de 4 años". Y E al suceso "se estropea". Datos:

$$p(A)=0.25,\qquad p(B)=0.40\ \ y\quad p(C)=0.35$$
$$p(E|A)=0.01,\qquad p(E|B)=0.05\ \ y\ \ p(E|C)=0.12$$

Probabilidad total: $p(E)=p(A\cap E)+p(B\cap E)+p(C\cap E)=$

$0.25\cdot 0.01+0.40\cdot 0.04+0.35\cdot 0.12=0.0025+0.016+0.042=0.0605$

b) Fórmula de Bayes:

$$p(C|E^c) = \frac{p(C \cap E^c)}{p(E^c)} = \frac{p(C) \cdot p(E^c|C)}{1 - p(E)} = \frac{0.35(1 - 0.12)}{1 - 0.0605} \approx 0.32$$

5) El peso en canal en kilos de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable normal de media μ y desviación típica igual a 0.9 kilos.
   a) Se tomó una muestra aleatoria imple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\overline{x} = 7{,}8\ kilos$. Obtener un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.
   b) Determinar el tamaño mínimo que debería tener una muestra para que el intervalo de confianza para μ del 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kilos.

a) $1 - \alpha = 0{,}992 \to \alpha = 0{,}008 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}004 \to 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}996 \to F\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 0{,}996 \to z_{\alpha/2} = 2.65$

$$E = 2{,}65 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{324}} = 2{,}65 \cdot \frac{0{,}9}{18} = 0.1325 \to I =]7{,}8 - 0{,}1325, 7{,}8 + 0{,}1325[\to$$

$$I =]7{,}6675, 7{,}9325[$$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \to 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 \to F\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 0{,}975 \to z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = 0{,}2 \to 0{,}2 = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{n}} \to \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}9}{0{,}2} = 8{,}82 \to n = 77{,}7924 \to$$

$$Tamaño\ mínimo: 78$$