MATEEMÁTICAS APLICADAS (MADRID 2017)

OPCIÓN B:

1) Sistema: $\begin{cases} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ (2-a)x+3y-2z=0 \end{cases}$

A) Discusión. B) Resolución para $a=3$.

A) Es un sistema homogéneo (siempre compatible, solución trivial).

$$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)\to \det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$\underbrace{=}_{\substack{F_1+F_3 \\ F_2-2F_3}}\begin{vmatrix} 3-a & 3-a & 0 \\ 3a-4 & -10 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 3-a & 3-a \\ 3a-4 & -10 \end{vmatrix}=$$

$$(-2)(3-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3a-4 & -10 \end{vmatrix}=2(a-3)(-10-3a+4)$$

$$=2(a-3)(-3a-6)=(-6)(a-3)(a+2)$$

$$Si\ a\neq 3\ \ y\ a\neq 2\to \det(A)\neq 0\to \begin{cases} rango(A)=3 \\ rango(A')=3 \\ nº\ incógnitas=3 \end{cases}\to \begin{matrix} Sistema \\ compatible \\ determinado \end{matrix}$$

$$Si\ a=3\ o\ bien\ a=2\to \begin{matrix} Sistema \\ compatible \\ indeterminado \end{matrix}$$

$B)Por\ Gauss$:

$$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)\underbrace{\sim}_{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3+F_1}}\left(\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)\underbrace{\sim}_{\frac{1}{5}F_2}\left(\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\underbrace{\sim}_{F_1+F_2}\left(\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)\to \begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z=0 \\ 0=0 \end{cases}\to \begin{cases} x=4\mu \\ y=2\mu \\ z=\mu \end{cases}, con\ \mu\in\mathbb{R}$$

2) Es $f(x)=x^3-3x$

a) Hallar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{1-x^3}\ \ y\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x}{1-x^3}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-3x}{x^3}}{\frac{1-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2-3)=-3$$

$$b)\ f(x)=x^3-3x\to f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0\to \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$Si\ x < -1 \to f'(x) > 0 \to f\ crece\ en\ x \in\ ]-\infty, 1[$$

$$Si -1 < x < 1 \to f'(x) < 0 \to f\ decrece\ en\ x \in\ ]-1,1[$$

$$Si\ x > 1 \to f'(x) > 0 \to f\ crece\ en\ x \in\ ]1, +\infty[$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+2}, si\ x \leq 0 \\ x+2, si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Estudio de su continuidad en $\mathbb{R}$.
b) Hallar:

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

a) En $x = -2, f$ no es continua, pues no está definida.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{2}{0+2} = 1 = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 2 = 2 \end{cases} \to \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

$En\ x = 0, f$ no es continua. Por tanto: $f\ es\ continua\ en\ \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b)

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2} dx = [2\ln|x+2|]_{-1}^{0} = 2\ln 2 - 2\ln 1 =$$

$$= 2\ln 2 - 0 = 2\ln 2$$

4) El 30% de los individuos de cierta población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa es de 0,20. Si una persona lee prensa, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se coge una persona al azar. Probabilidad de que:

a) No lea prensa
b) No lea prensa o no sea joven.

a) $p(J) = 0{,}30\ \ y\ \ p(J^c) = 0{,}70.\ También:\ p(L|J) = 0{,}20\ \ y\ \ p(J^C|L) = 0{,}90$

$$\to p(J|L) = 0{,}10$$

$$p(J|L) = \frac{p(J \cap L)}{p(L)} = \frac{p(J) \cdot p(L|J)}{p(L)} \to 0{,}10 = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}20}{p(L)} \to p(L) = 0{,}60$$

$$\to p(L^c) = 1 - p(L) = 0{,}40$$

b) $p(L^c \cup J^c) \underbrace{=}_{Ley\ de\ Morgan} p(L \cap J)^c = 1 - p(L \cap J) = 1 - p(J) \cdot p(L|J)$

$$= 1 - 0{,}30 \cdot 0{,}20 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$$

5) El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco se comporta normalmente con media μ y desviación típica $\sigma = 3\ T$. Se toma una muestra aleatoria de 484 contenedores.

a) Si la media es $\overline{x} = 25{,}9\ T$, obtener un intervalo de confianza para μ con un nivel del 95 %.
b) Si $\mu = 23\ T$, hallar la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

a) $1-\alpha=0{,}95 \to \alpha=0{,}05 \to \frac{\alpha}{2}=0{,}025 \to 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}975 \to F\left(Z<z_{\alpha/2}\right)=$ $0{,}975 \to z_{\alpha/2}=1{,}96$

$$E=1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{484}}=0{,}2673 \to I=]25{,}9-0{,}2673, 25{,}9+0{,}2673[$$

$$I=]25{,}6327, 26{,}1673[$$

b) $\sum X \equiv N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$

Entonces la carga total se comporta como $N(484\cdot 23;\ 3\cdot 22)=N(11132;\ 66)$

$$Z=\frac{X-11132}{66}\equiv N(0,1)$$

$$p(X<11000)=p\left(Z<\frac{X-11132}{66}\right)=p(Z<-2)=1-p(Z<2)=$$

$$=1-0.9772=0.0228$$