EvAU 2018 Propuesta A

Castilla-La Mancha

Ejercicio 1.

a) **Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función** $f(x) = x^{15} + x + 1$ **corta al eje** OX **al menos una vez en el intervalo** $[-1, 1]$**.**

b) **Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje** OX **cuando** x **recorre toda la recta real.**

Solución a) Teorema de Bolzano: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Vamos a aplicarlo a la función f dada en el enunciado. Es continua en todo $\mathbb{R}$ porque es un polinomio. Luego, tenemos que $f(-1) = (-1)^{15} + (-1) + 1 = -1 < 0$ y $f(1) = 1^{15} + 1 + 1 = 3 > 0$. Por lo tanto $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Como se cumple el teorema de Bolzano, existe al menos un c que pertenece al intervalo $(-1, 1)$ que corta al eje de abscisas.

b) Vamos a estudiar el crecimiento de la función f. Para ello, derivamos la función: $f'(x) = 15x^{14}+1$. Luego tenemos que los puntos críticos son

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^{14} = -1 \Rightarrow x^{14} = -\frac{1}{15}$$

que vemos que no tiene solución real. Por lo tanto, la función f es estrictamente creciente en toda la recta real porque $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si estudiamos los límites en el infinito, tenemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Como que la función es estrictamente creciente y va de menos infinito a más infinito, la función sólo corta al eje OX en 1 punto.

Ejercicio 2. **Calcula razonadamente las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$**.**

Solución a) Primero resolveremos la primitiva de la función que tenemos que integrar. Vamos a aplicar el método de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Tomamos $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx$ y $dv = \cos xdx \Rightarrow v = \sin x$. Luego, tenemos que:

$$\int (x^2 - 1) \cos xdx = (x^2 - 1) \sin x - \int \sin x2xdx = (x^2 - 1) \sin x - 2 \int xsinxdx$$

Volvemos a utilizar la técnica de integración por partes donde $u = x \Rightarrow du = dx$ y $dv = \sin xdx \to v = \int \sin xdx = -\cos x$:

$$\int (x^2-1) \cos xdx = (x^2-1) \sin x-2x(-\cos x)+2 \int (-\cos x)dx = (x^2-1) \sin x+2x \cos x-2 \int \cos xdx =$$

$$= (x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

Ahora, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} (x^2-1)\cos x dx = \left[(x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[(\pi^2-1)\sin\pi + 2\pi\cos\pi - 2\sin\pi\right] - \left[(0^2-1)\sin 0 + 2\cdot 0\cdot\cos 0 - 2\sin 0\right] = -2\pi - 0 = \boxed{-2\pi}$$

b) Aplicamos el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$, y tenemos que $e^{2x} = (e^x)^2 = t^2$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx = \int \frac{dt}{t^2+t-2}$$

Completamos el cuadrado para t^2+t-2:

$$t^2+t-2 = t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{9}{4} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Ahora tenemos que la integral resulta ser:

$$\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

La podemos resolver aplicando integración por sustitución: $u = t + \dfrac{1}{2} \Rightarrow du = dt$:

$$\int \frac{du}{u^2 - \frac{9}{4}}$$

Aplicamos descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{u^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{\left(u-\frac{3}{2}\right)\left(u+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A}{u-\frac{3}{2}} + \frac{B}{u+\frac{3}{2}} = \frac{A\left(u+\frac{3}{2}\right)+B\left(u-\frac{3}{2}\right)}{u^2-\frac{9}{4}}$$

Por tanto,

$$1 = A\left(u+\frac{3}{2}\right) + B\left(u-\frac{3}{2}\right)$$

. Para $u = \dfrac{3}{2}$:

$$1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Para $u = -\dfrac{3}{2}$:

$$1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

La integral resultante es:

$$\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{u-\frac{3}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{u+\frac{3}{2}}\right) du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u+\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\ln\left|u-\frac{3}{2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|u+\frac{3}{2}\right| + C$$

Ahora tenemos que volver a sustituir por las cambios hechos anteriormente:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx = \frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right| + C = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left|e^x-1\right| - \frac{1}{3}\ln\left(e^x+2\right) + C}$$

Ejercicio 3.

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y-az & = & 4 \\ x+ay+z & = & 2 \\ x+4y-5z & = & 6 \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$.

Solución a) Aplicaremos el método de Gauss porque luego en el apartado b) nos será muy útil. La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicamos reducción por filas. Primero, hacemos $2^o \to 2^o - 1^o$ y $3^o \to 3^o - 1^o$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -a+5 & -2 \\ 0 & a-4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora, $3^o \to 3^o + (a-4)2^o$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -a+5 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+9a-14 & -2a+4 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que $-a^2 + 9a - 14 = -(a-7)(a-2)$, y $-2a+4 = -2(a-2)$. Para $a = 2$, tenemos que la última fila de la matriz es una fila de ceros, por tanto, **el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad para $a = 2$.**

Para $a = 7$, tenemos que la última fila es $0z = k$, con $k \neq 0$ que no tiene sentido. Por tanto, **el sistema es incompatible para $a = 7$.**

Finalmente, **el sistema es compatible determinado para $a \neq 2$ y $a \neq 7$.**

b) Para $a = 2$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad y la matriz reducida es (del apartado anterior):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que $z = \lambda \in \mathbb{R}$. También, $-y + 3z = -2 \Rightarrow y = 2 + 3z = 2 + 3\lambda$. Finalmente, $x + 4y - 5z = 6 \Rightarrow x = 6 - 4y + 5z = 6 - 4(2+3\lambda) + 5\lambda = 6 - 8 - 12\lambda + 5\lambda = -2 - 7\lambda$. Por tanto, la solución del sistema es:

$$(x, y, z) = (-2 - 7\lambda, 2 + 3\lambda, \lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:

a) Calcula la distancia del punto A al plano α.

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α.

Solución a) Tenemos que $A = (a_1, a_2, a_3) = (2, -3, 1)$ y que el plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, con $A = 4$, $B = 2$, $C = 4$ y $D = -15$. Podemos aplicar directamente la fórmula:

$$d(A, \alpha) = \frac{|A \cdot a_1 + B \cdot a_2 + C \cdot a_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

b) Tomamos un punto arbitrario del espacio $P(x, y, z)$. Su distancia al plano α es $\frac{3}{2}$:

$$d(P, \alpha) = \frac{|4x + 2y + 4z - 15|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{3}{2}$$

$$|4x + 2y + 4z - 15| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z - 15 = 9 \\ 4x + 2y + 4z - 15 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z - 24 = 0 \\ 4x + 2y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5.

a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a 1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso.

a 2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

c) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b 1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X.

b 2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

Solución a) a 1) Llamamos D a "el condensador es defectuoso". Se tiene que este condensador puede proceder de cada una de las tres máquinas y, por tanto, según el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta las probabilidades, tenemos:

$$P(D) = P(M_A) \cdot P(D|M_A) + P(M_B) \cdot P(D|M_B) + P(M_C) \cdot P(D|M_C) =$$

$$= \frac{500}{2000} \cdot \frac{3}{100} + \frac{700}{2000} \cdot \frac{4}{100} + \frac{800}{2000} \cdot \frac{2}{100} = \boxed{\frac{59}{2000} = 0,0295}$$

a 2) Nos piden la probabilidad condicionada $P(M_A|D)$ que aplicando el teorema de Bayes:

$$P(M_A|D) = \frac{P(D|M_A)P(M_A)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{100} \cdot \frac{500}{2000}}{\frac{59}{2000}} = \boxed{\frac{15}{59} = 0,254}$$

b) Claramente, tenemos una distribución binomial porque tenemos que contar el número de éxitos en una secuencia de $n = 5$ ensayos de Bernoulli independientes entre si, con una probabilidad $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ de ocurrencia de éxito (sacar número múltiplo de tres). Por tanto, nuestra variable aleatoria X sigue una distribución binomial $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$. Sabemos que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$.

b 1) Sabemos que la media de una distribución binomial es:

$$\mathbb{E}[X] = np = 5 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

También, la varianza es $Var[X] = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$. Por tanto, la desviación típica es de:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\sqrt{10}}{3}}$$

b 2) Nos estan pidiendo $P(X \geq 4)$ que por la tabla que nos dan es:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,0412 + 0,0041 = \boxed{0,0453}$$

EvAU 2018 Propuesta B

Castilla-La Mancha

Ejercicio 1.

a) **Prueba que cualquiera que sea la constante** a **la función** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ **cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo** $[1,3]$**.**

b) **Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto** $(1,3)$ **cuya existencia asegura el teorema de Rolle.**

c) **Calcula razonadamente los puntos de la gráfica** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ **donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta** $y = 4x + 2$**.**

Solución a) La función f es continua en el intervalo cerrado $[1,3]$ por ser polinómica.

Es derivable en el intervalo abierto $(1,3)$ por ser polinómica.

$f(1) = 1^3 - 5\cdot 1^2 + 7\cdot 1 + a = a + 3$ y $f(3) = 3^3 - 5\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + a = a + 3$ que vemos que se cumple que $f(1) = f(3)$.

b) Como que se cumplen las tres hipótesis del teorema de Rolle, debe existir un punto c en el intervalo abierto $(1,3)$ con derivada nula en dicho punto $f'(c) = 0$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$. Luego,

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{7}{3}, c_2 = 1$$

Vemos que el punto $c_1 = \frac{7}{3} \in (1,3)$.

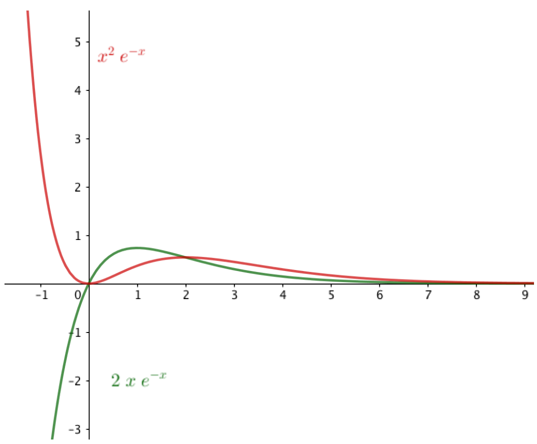
c) Tenemos que la pendiente de la recta dada es $m = 4$. Por tanto, tenemos que encontrar los puntos a tales que $f'(a) = 4$.

$$f'(a) = 4 \Rightarrow 3a^2 - 10a + 7 = 4 \Rightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{3}$$

El punto correspondiente en $a_1 = 3$ es $\boxed{P(3,3)}$ y en $a_2 = \frac{1}{3}$, tenemos que $\boxed{Q\left(\frac{1}{3}, \frac{49}{27}\right)}$.

Ejercicio 2. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ **y** $g(x) = x^2e^{-x}$**, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones.**

Solución En primer lugar representamos las funciones: Hallamos también los puntos de corte de las



funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = 2xe^{-x} \\ y = x^2e^{-x} \end{cases} \Rightarrow 2xe^{-x} = x^2e^{-x} \Rightarrow x = 2, x = 0 \Rightarrow \left(2, \frac{4}{e^2}\right), (0,0)$$

Por tanto, la área pedida será:

$$A = \int_0^2 \left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right) dx$$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int (2xe^{-x} - x^2e^{-x})dx = 2\int xe^{-x}dx - \int x^2e^{-x}dx$$

Aplicamos integración por partes en las dos integrales resultantes:

$$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int (2xe^{-x} - x^2e^{-x})dx = -2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx + x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C = e^{-x}x^2 + C$$

Ya podemos aplicar la regla de Barrow para calcular la área pedida:

$$A = \left[e^{-x}x^2\right]_0^2 = \left[e^{-2}(-2)^2\right] - \left[0^2e^{-0}\right] = \boxed{\frac{4}{e^2}\,u^2}$$

Ejercicio 3.

a) Encuentra los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado.

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$.

Solución a) La matriz tiene inversa cuando el valor de su determinante es distinto de cero. Por tanto, calculamos el determinante de la matriz dada aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + 1 \cdot 1 \cdot a + 1 \cdot a(a-2) = (2a-2)(a-2) + a + a(a-2) =$$

$$= 2a^2 - 4a - 2a + 4 + a + a^2 - 2a = 3a^2 - 7a + 4 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = 1$$

Por tanto, existe matriz inversa para $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, \frac{4}{3}\}$.

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 3(2)^2 - 7(2) + 4 = 2$. Luego,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, calculamos la adjunta de la traspuesta:

$$(A^t)^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Efectivamente,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$$

c) Para $a = 0$, tenemos que $|A| = 3 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 4 = 4$.

Sabemos que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

Por otra propiedad de los determinantes $|2A| = 2^3|A| = 8 \cdot 4 = \boxed{32}$.

Ejercicio 4. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta.

c) Encuentre razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución a) Para que los vectores dados sean perpendiculares, su producto escalar tiene que ser igual a cero.

$$(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = [(0,1,1) - \lambda(1,1,-1)] \cdot (2,0,3) = (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) \cdot (2,0,3) = -2\lambda + 3 + 3\lambda = \lambda + 3$$

$$\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$$

b) Los vectores son linealmente dependientes si el determinante de la matriz que forman es nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 3 = -7 \neq 0$$

Por tanto, no son linealmente dependientes. De hecho, son linealmente independientes.

c) Tenemos que encontrar dos planos tales que su intersección sea la recta pedida. Como que la recta debe ser perpendicular simultáneamente a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego los vectores normales de los dos planos deben ser estos mismos $\vec{n_1} = \vec{u}$ y $\vec{n_2} = \vec{v}$. Por tanto tenemos que $\pi_1 \equiv y + z + D_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z + D_2 = 0$. Como que los dos planos tienen que pasar por $P(2,0,2)$:

$$0 + 2 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = -2$$

$$2 + 0 - 2 + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

Por tanto, las ecuaciones implícitas de la recta son:

$$\boxed{\begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}}$$

Ejercicio 5.

a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calculo razonadamente la probabilidad de:

a 1) Ser hombre y votante de C.

a 2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer.

b) **Las notas que se han obtenido por** 1000 **opositores han seguido una distribución normal de media** $4,05$ **y desviación típica** $2,5$**.**

b 1) ¿Cuántos opositores han superado el 5**? Razona la respuesta.**

b 2) Si tenemos que adjudicar 330 **plazas, calcula razonadamente la nota de corte.**

Solución a) Los datos que nos da el enunciado son: $P(M) = 0,6 \Rightarrow P(H) = 1 - 0,6 = 0,4$, $P(A|M) = 0,3$, $P(B|M) = 0,5$, $P(C|M) = 1 - (0,3 + 0,5) = 0,2$, $P(A|H) = 0,1$, $P(B|H) = 0,6$, $P(C|H) = 1 - (0,1 + 0,6) = 0,3$.

a 1)

$$P(H \cap C) = P(H) \cdot P(C|H) = 0,4 \cdot 0,3 = \boxed{0,12}$$

a 2) Aplicando el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total, tenemos que:

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \cdot P(B|M)}{P(M) \cdot P(B|M) + P(H) \cdot P(A|H)} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6} =$$

$$= \frac{0,3}{0,3 + 0,24} = \frac{0,3}{0,54} = \boxed{\frac{5}{9} = 0,55}$$

b) Llamamos X a las notas que se han obtenido que siguen una distribución normal. $X \sim N(4,05; 2,5) \Rightarrow Z = \dfrac{X - 4,05}{2,5} \sim N(0,1)$.

b 1)Mirando a la tabla que nos dan:

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5 - 4,05}{2,5}\right) = P(Z > 0,38) = 1 - P(Z < 1,38) = 1 - 0,648 = 0,352$$

Luego:

$$0,352 = \frac{n}{1000} \Rightarrow \boxed{n = 352}$$

b 2)

$$\frac{330}{1000} = 0,33 \Rightarrow P(X > C) = 0,33 \Rightarrow P(X < C) = 1 - 0,33 = 0,67 \Rightarrow$$

Mirando a la tabla:

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{C - 4,05}{2,5}\right) = 0,67 \Rightarrow \frac{C - 4,05}{2,5} = 0,44 \Rightarrow \boxed{C = 5,15}$$