EvAU 2018 Opción A

Comunidad de Madrid

Ejercicio 1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m, \end{cases}$$

se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Solución a) La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -m-1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -m-1 & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -m-1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m+1)(m-1); \quad m = -1, \quad m = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 1$, tenemos que $rg(A) = rg(A') = n = 3$. Por tanto, **para $m \neq -1$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.**

Vamos a estudiar ahora el sistema para $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, podemos observar que $rg(A) = 2$ y $rg(A') = 3$. Por tanto, **para $m = -1$ el sistema es incompatible**. Finalmente, lo vemos para $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Claramente, podemos observar que $rg(A) = 2$ y $rg(A') = 3$. Por tanto, **para $m = 1$ el sistema es incompatible**.

b) Vamos a resolver el sistema en el caso $m = 0$ que sabemos que es compatible determinado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos: $2^{\text{o}} \to 2^{\text{o}} - 1^{\text{o}}$ y $3^{\text{o}} \to 3^{\text{o}} + 2 \cdot 1^{\text{o}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $3^{\text{o}} \to 3^{\text{o}} - 2^{\text{o}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que el sistema resultante es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \\ -y + 2z = 1 \\ \\ -z = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación, tenemos que $z = 0$. Sustituyendo a la segunda:

$$y = 2z - 1 = -1, \quad x = 1$$

La solución del sistema es:

$$\boxed{(x, y, z) = (1, -1, 0)}$$

Ejercicio 2. a) **En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:** $m_1 = 0.92$**,** $m_2 = 0.94$**,** $m_3 = 0.89$**,** $m_4 = 0.90$**,** $m_5 = 0.91$**.**

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ **alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.**

b) **Aplique el método de integración por partes para calcular la integral** $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$**, donde** $\ln$ **significa logaritmo neperiano.**

Solución a) La función a minimizar es:

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$$

Derivando:

$$E'(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + \cdots + 2(x - m_5) = 2[5x - (m_1 + m_2 + \cdots + m_5)]$$

Igualamos la derivada a 0:

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 2[5x - (m_1 + m_2 + \cdots + m_5)] = 0 \Rightarrow x = \frac{m_1 + m_2 + \cdots m_5}{5} = \bar{m}$$

Tenemos que $E''(x) = 10 > 0$. Por tanto $E''(\bar{m}) > 0$ y esto implica que $\bar{m}$ es un mínimo relativo y en nuestro caso también absoluto:

$$E_{\text{min}} = E(\bar{m}) \Rightarrow \bar{m} = \frac{0.92 + 0.94 + 0.89 + 0.90 + 0.91}{5} = \boxed{0.912}$$

b) Aplicamos el método de integración por partes:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 1\right) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{8}{3} \ln(2) - \frac{7}{9}}$$

Ejercicio 3. Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Solución a) Nos tenemos que fijar que los dos planos dados son paralelos. Por tanto, la aresta del cubo sera la distancia entre estos planos. Tenemos que recordar que para calcular la distancia entre dos planos paralelos basta coger un punto de uno de ellos y calcular la distancia al otro.

$$\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x+3y-6z+5=0$$

$$\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x+3y-6z+\frac{1}{2}=0$$

$$L=d(\pi_1,\pi_2)=\frac{\left|5-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{49}}=\frac{9}{14} \Rightarrow \boxed{V=L^3=\frac{729}{2744}\ u^3}$$

b) Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r que es la intersección de los planos π_2 y π_3 que contiene a C:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_2 \equiv 2x+3y-6z+5=0 \\ \pi_3 \equiv x-y+z-2=0 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \Rightarrow E_1-2E_2} \begin{cases} 5y-8z+9=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to 5E_2+E_1} \begin{cases} 5y-8z+9=0 \\ 5x-3z-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{5}+3\mu \\ y=-\frac{9}{5}+8\mu \\ z=5\mu \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{5}+3\mu,-\frac{9}{5}+8\mu,5\mu\right)$$

$$A(2,1,3),B(1,2,3) \Rightarrow \vec{AB}=(-1,1,0) \quad \text{y} \quad \vec{BC}=\left(-\frac{4}{5}+3\mu,-\frac{19}{5}+8\mu,5\mu-3\right)$$

$$\vec{AB} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{BC}=0 \Rightarrow \frac{4}{5}-3\mu-\frac{19}{5}+8\mu=0 \Rightarrow -3+5\mu=0 \Rightarrow \mu=\frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\boxed{C(2,3,3)} \quad \text{y} \quad \vec{BC}=(1,1,0), \quad \text{con} \quad |\vec{BC}|=|\vec{AB}|$$

$$D(x,y,z), \quad \vec{AB}=\vec{DC} \Rightarrow (-1,1,0)=(2-x,3-y,3-z) \Rightarrow \boxed{D(3,2,3)}$$

Ejercicio 4. El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución Definimos los sucesos: R: artículos con precios rebajados. D: artículos devueltos. A partir del enunciado, tenemos que $P(R)=0.6$, $P(R^c)=1-P(R)=1-0.6=0.4$, $P(D|R)=0.15 \Rightarrow P(D^c|R)=1-P(D|R)=1-0.15=0.85$ y $P(D|R^c)=0.08 \Rightarrow P(D^c|R^c)=1-P(D|R^c)=1-0.08=0.92$.

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(D|R)P(R)+P(D|R^c)P(R^c)=0.15\cdot 0.6+0.08\cdot 0.4=0.122$$

Por tanto, el porcentaje es de $\boxed{12.2\%}$.

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(R|D)=\frac{P(R\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D|R)\cdot P(R)}{P(D)}=\frac{0.15\cdot 0.6}{0.122}=0.738$$

El porcentaje de artículos devueltos adquiridos con precios rebajados es de $\boxed{73.77\%}$.

EvAU 2018 Opción B

Comunidad de Madrid

Ejercicio 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**, se pide:**

a) Obtener los valores del parámetro m **para los que la matriz** A **admite inversa.**

b) Para $m = 0$**, calcular** $A \cdot B$ **y** $A^{-1} \cdot B$**.**

c) Calcular $B \cdot B^t$ **y** $B^t \cdot B$**, donde** B^t **denota la matriz traspuesta de** B**.**

Solución a) Una matriz admite inversa si y sólo si su determinante es no nulo.

Vemos que

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4m - 4 - m^2 = -(m+2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

de manera que la matriz A admite inversa si $\boxed{m \neq -2}$.

b) Para $m = 0$, tenemos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Las dimensiones de las matrices A y B son distintas: 3×3 y 3×1. Pero como el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, pueden multiplicarse obteniendo una matriz de dimensión 3×1.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Calculamos la inversa de A. Sabemos que el $|A| = -(0+2)^2 = -4$. La matriz traspuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la adjunta de la traspuesta es:

$$(A^t)^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

c) Calculamos $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, los productos pedidos valen:

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ((-2)(-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = \boxed{(4)}$$

Ejercicio 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) Calcular $f'(4)$.

c) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución Primero de todo, convertimos la función en una a trozos. Sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, nuestra función será:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x \geq 0 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es toda la recta real. Veamos si es contínua en toda la recta:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 0$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0k} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 0$$

Por tanto, la función es contínua en toda la recta real.

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-(-x)}{\sqrt{(-x)^2+9}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, $\boxed{y = 1}$ es una asíntota horizontal de f para $x \to \pm\infty$.

b) Primero de todo vamos a calcular la derivada de la función y a estudiar la derivabilidad de f:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right)' = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

Por tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} & si \quad x > 0 \\ -\dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^-) = -\frac{9}{(0^2+9)\sqrt{0^2+9}} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(0^+) = \frac{9}{(0^2+9)\sqrt{0^2+9}} = \frac{1}{3}$$

Como que nos da distinto, f no es derivable en $x = 0$. Vamos a calcular $f'(4) = \dfrac{9}{(4^2+9)\sqrt{4^2+9}} = \boxed{\dfrac{9}{125}}$

c) Claramente, la función f corta al eje OX en $x = 0$. Por tanto, el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+9}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+9}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{2}\left(6-2\sqrt{10}\right) + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}-6\right) =$$

$$= -3 + \sqrt{10} + \sqrt{10} - 3 = \boxed{-6+2\sqrt{10}}$$

La función es par. Podemos hacer la integral entre 0 y 1, y a multiplicar por 2.

Ejercicio 3. Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución a) Para hallar esta distancia, utilizaremos que:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u_r} \times \vec{AP}|}{|\vec{u_r}|}$$

donde $\vec{u_r}$ es un vector director de la recta r y A es un punto de la recta. Por tanto, primero tenemos que encontrar la ecuación vectorial de la recta r:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2:2\cdot E_2-5\cdot E_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$z = \lambda \Rightarrow 5y = 2z - 2 = 2\lambda - 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\lambda$$

$$2x = 2 - y = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}\lambda \Rightarrow x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda$$

Por tanto,

$$r \equiv (x,y,z) = \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\lambda, \lambda\right)$$

Tenenemos que $A\left(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right)$ y $\vec{u_r} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$. Luego $\vec{AP} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1\right)$. Calculamos el producto vectorial requerido para el problema:

$$\vec{u_r} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{vmatrix} = -i + 0j - \frac{1}{5}k = \left(-1, 0, -\frac{1}{5}\right)$$

Aplicando la fórmula, tenemos que la distancia es de:

$$d(P,r) = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{\frac{\sqrt{30}}{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{195}}{15}\ u}$$

b) Un punto de la recta r es $A\left(\frac{6}{5},-\frac{2}{5},0\right)$ y $\vec{u_r}=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1\right)$ y s viene determinada por $B(2,-1,1)$ y $\vec{u_s}=(-1,1,1/3)$. La posición relativa de r y s viene determinada por la posición de $\vec{AB}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},1\right)$, $\vec{u_r}$ y $\vec{u_s}$, y ésta se analiza calculando el determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{15} \neq 0$$

Entonces, los vectores son linealmente independientes, lo que significa que no son coplanarios, y **las rectas se cruzan**.

c) Como que el plano tiene que ser perpendicular a s, su vector normal tiene que ser paralelo al vector director de s. Por tanto, $\vec{n_\pi}=\vec{u_s}=(-1,1,1/3)$, y esto implica que:

$$\pi \equiv -x+y+\frac{1}{3}z+D=0$$

Sabemos que π tiene que pasar por $P(1,1,1)$:

$$-1+1+\frac{1}{3}\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=-\frac{1}{3}$$

Y por tanto, la ecuación buscada del plano es:

$$\boxed{\pi \equiv -x+y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x-3y-z+1=0}$$

Ejercicio 4. En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución Las datos que nos da el enunciado son: $P(A)=0.75$, $P(B)=0.25$, $P(D|A)=0.025$, $P(D|B)=0.05$.

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)=0.75\cdot 0.025+0.25\cdot 0.05=0.03125=\frac{1}{32}$$

Como que se fabrican $n=5000$ productos en un mes. Tenemos que X es una variable aleatoria tal que $X\sim B\left(5000,\frac{1}{32}\right)$. La media o esperanza de esta variable es de $\bar{x}=np=5000\cdot\frac{1}{32}=\boxed{156.25}$.

b)

$$n=6000 \Rightarrow X\sim B(6000,0.025) \Rightarrow \mu=6000\cdot 0.025=150, \quad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{150\cdot(1-0.025)}=12.1$$

Luego, aproximando la distribución por una normal, tenemos que $X\sim Y\equiv N(150,12.1) \Rightarrow Z=\frac{X-150}{12.1}\equiv N(0,1)$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P(X>160)\approx P(Y>160.5)=P\left(Z>\frac{160.5-150}{12.1}\right)=P(Z>0.87)=1-P(Z<0.87)=1-0.8078=$$

$$=\boxed{0.1922}$$